دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
دانشکده‌ی ریاضی

رساله‌ی دکتری

رشته - گرایش

عنوان:

عنوان رساله‌ی دکتری

نویسنده:

آریس آقانیانس

استاد راهنما:

دکتر ...

استاد مشاور:

دکتر ...

شهریور ۱۳۹۵

به نام خدا

[متن این صفحه می‌تواند تغییر کند.]

تقدیم (اختیاری)

تأییدیه‌ی هیأت داوران

هیأت داوران پس از مطالعه‌ی رساله و شرکت در جلسه‌ی دفاع از رساله‌ی تهیه‌شده تحت عنوان

عنوان رساله‌ی دکتری

توسط آقای **آریس آقانیانس** صحت و کفایت تحقیق انجام‌شده را برای اخذ درجه‌ی **دکتری** در رشته‌ی **رشته - گرایش** در تاریخ / / **۱۳** مورد تأیید قرار می‌دهند.

۱- استاد راهنما	دکتر ...	امضا
۲- استاد مشاور	دکتر ...	امضا
۳- ممتحن داخلی	دکتر ...	امضا
۴- ممتحن داخلی	دکتر ...	امضا
۵- ممتحن خارجی	دکتر ...	امضا
۶- ممتحن خارجی	دکتر ...	امضا
۷- نماینده‌ی تحصیلات تکمیلی دانشکده	دکتر ...	امضا

اظهارنامه‌ی دانشجو

عنوان رساله: ...

استاد راهنما: دکتر ...

استاد مشاور: دکتر ...

دانشجو: آریس آقانیانس

شماره‌ی دانشجویی: ...

اینجانب **آریس آقانیانس** دانشجوی دوره‌ی **دکتری** رشته‌ی **رشته - گرایش** دانشکده‌ی **ریاضی** دانشگاه **صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی** گواهی می‌نمایم که تحقیقات ارائه‌شده در رساله با عنوان

«عنوان رساله‌ی دکتری»

با راهنمایی استاد محترم جناب آقای دکتر ... و مشاوره‌ی جناب آقای دکتر ... توسط شخص اینجانب انجام شده و صحت و اصالت مطالب نگارش‌شده در این رساله مورد تأیید می‌باشد و در موارد استفاده از کار دیگر محققان به مرجع مورد استفاده اشاره شده است.

به علاوه، گواهی می‌نمایم که مطالب مندرج در رساله، تاکنون برای دریافت هیچ نوع مدرک یا امتیازی توسط اینجانب یا فرد دیگری در هیچ‌جا ارائه نشده است و در تدوین متن رساله، چارچوب (فرمت) مصوب دانشگاه را به طور کامل رعایت کرده‌ام.

امضای دانشجو:

تاریخ:

فرم حق طبع و نشر و مالکیت نتایج

۱- حق چاپ و تکثیر این رساله متعلق به نویسنده‌ی آن می‌باشد. هرگونه کپی‌برداری به صورت کل رساله یا بخشی از آن تنها با موافقت نویسنده یا کتابخانه‌ی دانشکده‌ی ریاضی دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی مجاز می‌باشد.
ضمناً متن این صفحه نیز باید در نسخه‌ی تکثیرشده وجود داشته باشد.

۲- کلیه‌ی حقوق معنوی این اثر متعلق به دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی می‌باشد و بدون اجازه‌ی کتبی دانشگاه به شخص ثالث قابل واگذاری نیست.
همچنین، استفاده از اطلاعات و نتایج موجود در رساله، بدون ذکر مراجع، مجاز نمی‌باشد.

تقدیر و تشکر (اختیاری)

چکیده

در این رساله،

کلیدواژه‌ها: کلیدواژه‌ی ۱؛ کلیدواژه‌ی ۲؛ کلیدواژه‌ی ۳.

رده‌بندی موضوعی ریاضیات (۲۰۱۰): اولیه: ۴۷H۱۰؛ ثانویه: ۵۴H۲۵، ۵۴E۱۵، ۰۵C۲۰.

فهرست مطالب

عنوان	صفحه
پیشگفتار	۱
فصل ۱ فضاهای یکنواخت	۲
پیشنیازهای لازم حاصل‌ضرب دکارتی و رابطه‌ها	۲
یکنواختی و فضای یکنواخت	۷
فصل ۲ نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت یکنواختی به کمک پیرامون‌های پایه‌ای	۹
مفهوم نقطه‌ی ثابت و اصل انقباض باناخ در فضاهای متریک	۹
نمونه‌ای از یک جدول	۱۰
نتیجه‌گیری و چند پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی	۱۱
مراجع	۱۲
فهرست نمادها	۱۳
واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی	۱۴
واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی	۱۶
نمایه	۱۸

فهرست شکل‌ها

نام شکل **صفحه**

شکل ۱.۱: قطر یک مجموعه‌ی ناتهی و وارون یک رابطه روی آن ۳
شکل ۲.۱: نگاره‌ی یک نقطه تحت یک رابطه ۶

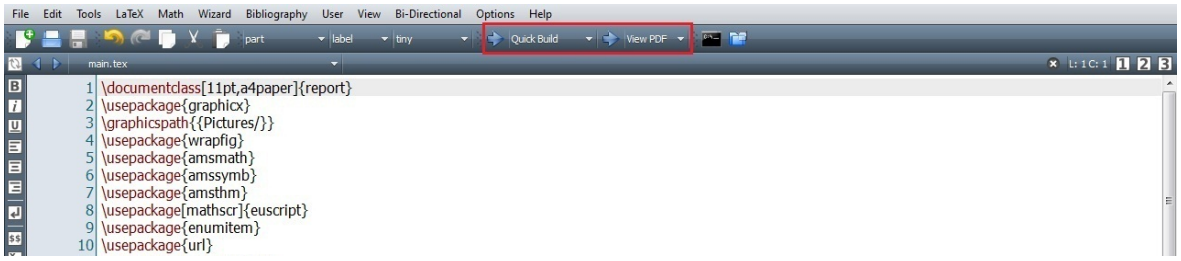
فهرست جدول‌ها

نام جدول **صفحه**

جدول ۱.۲: تعداد حاضرین و غایبین در جلسه ۱۰

پیشگفتار

برای اجرای این فایل لازم است توزیع تک TeXLive 2015 یا بالاتر و فونت‌های Yas و IranNastaliq روی سیستم نصب باشند. پس از انجام هرگونه تغییر در هریک از فایل‌های front.tex، back.tex، chapter1.tex یا chapter2.tex، باید تغییرات انجام‌شده ذخیره شوند و سپس فایل main.tex از گزینه‌ی Run در حالت Quick Build پردازش گردد. همچنین برای مشاهده‌ی خروجی به صورت PDF، باید از گزینه‌ی View درحالت View PDF استفاده شود (شکل زیر). پردازش برنامه و مشاهده‌ی خروجی به ترتیب با فشردن کلیدهای F1 و F7 نیز امکانپذیر است. در صورت نیاز به گنجاندن شکل در متن، باید فایل شکل مورد نظر در پوشه‌ی Pictures قرار گیرد.



پس از نصب TeXLive روی سیستم، می‌توان با وارد کردن دستور texdoc lshort-persian در محیط cmd ویندوز، فایل راهنمای فارسی لاتک را فراخوانی کرد.

مقالات مستخرج از رساله

[1] **A. Aghanians**, K. Fallahi and K. Nourouzi, Fixed points for E-asymptotic contractions and Boyd-Wong type E-contractions in uniform spaces, *Bull. Iran. Math. Soc.* **39** (2013), no. 6, 1261–1272.

[2] R. P. Agarwal, **A. Aghanians**, K. Fallahi and K. Nourouzi, Coincidence point theorems for E-(ψ, φ)- and E-φ-weak contractions in partially ordered uniform spaces, *J. Nonlinear Convex Anal.*, (To appear).

آریس آقانیانس

تهران، شهریور ۱۳۹۵

فصل ۱
فضاهای یکنواخت

خانواده‌ی همه‌ی فضاهای یکنواخت بین خانواده‌های همه‌ی فضاهای متریک و همه‌ی فضاهای توپولوژیک قرار دارد. به بیان دیگر، هر فضای متریک یک فضای یکنواخت و هر فضای یکنواخت یک فضای توپولوژیک است. در حقیقت، با تعمیم مفهوم متر در فضاهای متریک که فاصله‌ی دو نقطه را به طور کمی اندازه می‌گیرد، مفهوم جدیدی به نام «پیرامون» معرفی می‌شود که فاصله‌ی دو نقطه را به صورت کیفی بیان می‌کند. به این ترتیب، زیرخانواده‌ای از فضاهای توپولوژیک به دست می‌آید که در آنها مفاهیم یکنواختی همچون ویژگی کوشی دنباله‌ها، کامل دنباله‌ی بودن فضاهای توپولوژیک، پیوستگی یکنواخت نگاشت‌ها (که هاینه در سال ۱۸۷۰ برای توابع حقیقی روی فضاهای اقلیدسی و فرشه در سال ۱۹۲۸ برای نگاشت‌های بین دو فضای متریک ارائه داده بود) و همگرایی یکنواخت دنباله‌ای از نگاشت‌ها (که وایراشتراس در سال ۱۸۴۱ برای توابع حقیقی ارائه داده بود) قابل تعریفند. گفتنی است در فضاهای توپولوژیک چنین مفاهیمی تعریف نمی‌شوند؛ زیرا، همسایگی‌های هر نقطه و در نتیجه، مفهوم «فاصله‌ی توپولوژیک» به موقعیت آن نقطه بستگی کامل دارد. همچنین، زیرخانواده‌ی یادشده در بالا علاوه بر فضاهای متریک، همه‌ی فضاهای متریک مخروطی، گروه‌های توپولوژیک، فضاهای برداری توپولوژیک، حلقه‌های توپولوژیک و مشبکه‌ها را نیز شامل می‌شود. از اینرو اهمیت این تعمیم به آن است که با رسیدن به فضاهایی با ویژگی‌های مشابه، سیمای اصلی فضاهای متریک حفظ می‌گردد. بسیاری از شباهت‌های بین فضاهای متریک و یکنواخت در این فصل و فصل آینده به روشنی دیده می‌شوند.

پیشنیازهای لازم حاصل‌ضرب دکارتی و رابطه‌ها

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است که ما در سرتاسر این رساله، اعضای آن را نقاط خواهیم نامید. اگر Y یک زیرمجموعه‌ی X باشد (X یک زبرمجموعه‌ی Y باشد)، می‌نویسیم $Y \subseteq X$ و اگر Y یک زیرمجموعه‌ی سره X باشد (X یک زبرمجموعه‌ی سره Y باشد)، می‌نویسیم $Y \subset X$. بنابراین $Y \subset X$ بدان معناست که $Y \subseteq X$ و $Y \neq X$. به علاوه، عدد اصلی، مجموعه‌ی توانی و نگاشت همانی X را به ترتیب با $\mathrm{card}(X)$، $\mathcal{P}(X)$ و id_X نشان می‌دهیم. از اینرو $\mathrm{id}_X : X \to X$ برای هر $x \in X$ با ضابطه‌ی $\mathrm{id}_X(x) = x$ تعریف می‌شود.

می‌دانیم حاصل‌ضرب دکارتی $X \times X$ از همه‌ی زوج‌های مرتبی تشکیل می‌شود که مؤلفه‌های آنها نقاطی از X هستند، یعنی، $X \times X = \{(x, y) : x, y \in X\}$ و هر زیرمجموعه‌ی آن یک رابطه‌ی دوتایی یا به طور خلاصه، یک رابطه روی X می‌باشد. بنابراین $\mathcal{P}(X \times X)$ خانواده‌ی همه‌ی رابطه‌های روی X است.

منظور از قطر X، زیرمجموعه‌ی $X \times X$ متشکل از همه‌ی زوج‌های مرتب با مؤلفه‌های برابر است. در ریاضیات، نمادهای گوناگونی برای نمایش قطر یک مجموعه‌ی ناتهی به کار می‌روند. ما در سرتاسر این رساله، از $\Delta(X)$ برای نشان دادن قطر X

استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$\Delta(X) = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\} = \mathrm{graph}(\mathrm{id}_X)$$

که در آن $\mathrm{graph}(\mathrm{id}_X)$ نمودار نگاشت همانی X است.

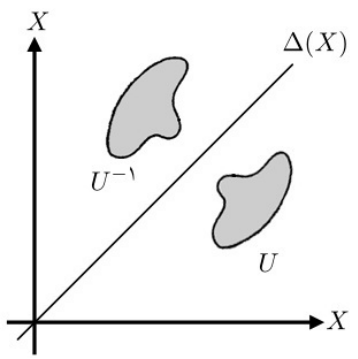
اگر U و V دو رابطه روی X باشند، آن‌گاه با الهام از تعریف وارون و ترکیب نگاشت‌ها، U^{-1} و $U \circ V$ به شکل‌های

$$U^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in U\}$$

و

$$U \circ V = \{(x,y) \in X \times X : \exists z \in X; (x,z) \in V,\ (z,y) \in U\}$$

تعریف می‌شوند. به ویژه، اگر $f : X \to X$ نگاشتی وارونپذیر باشد، آن‌گاه $\mathrm{graph}(f)^{-1} = \mathrm{graph}(f^{-1})$ و اگر $f, g : X \to X$ دو نگاشت دلخواه باشند، آن‌گاه $\mathrm{graph}(f \circ g) = \mathrm{graph}(f) \circ \mathrm{graph}(g)$. به همین سبب، U^{-1} و $U \circ V$ به ترتیب وارون U و ترکیب U با V نامیده می‌شوند. روشن است که اعمال وارون و ترکیب برای رابطه‌ها تعمیم طبیعی اعمال نظیر برای نگاشت‌ها هستند.



شکل ۱.۱: قطر X و وارون U

از دیدگاه هندسی، قطر یک مجموعه‌ی ناتهی X نیمساز نواحی اول و سوم در دستگاه مختصات دکارتی $X \times X$ و وارون یک رابطه‌ی U روی X بازتاب U در صفحه نسبت به $\Delta(X)$ است. اما متأسفانه، به نظر می‌رسد که ترکیب دو رابطه روی X با مفاهیم طبیعی هندسی قابل تعبیر نیست.

دو گزاره‌ی زیر شماری از حالات خاص و مهمترین ویژگی‌های اعمال وارون و ترکیب رابطه‌ها را که در جای‌جای این رساله مورد استفاده قرار می‌گیرند، بیان می‌کنند و ارتباط بین این دو عمل را روشن می‌سازند.

۱.۱ گزاره ([۶، قضیه‌ی ۲.۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است و U و V دو رابطه روی X هستند. در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند:

i) $\emptyset^{-1} = \emptyset$، $\Delta(X)^{-1} = \Delta(X)$ و $(X \times X)^{-1} = X \times X$.

ii) $(U^{-1})^{-1} = U$.

iii) اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $U^{-1} \subseteq V^{-1}$.

iv) $(U \cup V)^{-1} = U^{-1} \cup V^{-1}$ و $(U \cap V)^{-1} = U^{-1} \cap V^{-1}$.

برهان. i) بدیهی است.

ii) بنابر تعریف عمل وارون داریم

$$(U^{-1})^{-1} = \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in U^{-1}\} = \{(x,y) \in X \times X : (x,y) \in U\} = U.$$

iii) اگر $(x,y) \in U^{-1}$، آن‌گاه $(y,x) \in U \subseteq V$. بنابراین $(x,y) \in V^{-1}$ و از اینرو $U^{-1} \subseteq V^{-1}$.

iv) فقط تساوی نخست (اجتماع) را ثابت می‌کنیم. اثبات تساوی دیگر مشابه است. به این منظور داریم

$$\begin{aligned}(U \cup V)^{-1} &= \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in U \cup V\} \\ &= \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in U\} \cup \{(x,y) \in X \times X : (y,x) \in V\} \\ &= U^{-1} \cup V^{-1}. \quad \square\end{aligned}$$

۲.۱ گزاره ([۶، قضیه‌ی ۲.۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است و U، V و W سه رابطه روی X هستند. در این صورت عبارت‌های زیر برقرارند:

i) $U \circ \emptyset = \emptyset \circ U = \emptyset$ و $U \circ \Delta(X) = \Delta(X) \circ U = U$.

ii) $(U \circ V) \circ W = U \circ (V \circ W)$.

iii) اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $U \circ U \subseteq V \circ V$ و $U \circ U^{-1} \subseteq V \circ V^{-1}$.

iv) اگر $\Delta(X) \subseteq U$، آن‌گاه $U \subseteq U \circ U$ و $U \subseteq U \circ U^{-1}$.

v) $(U \circ V)^{-1} = V^{-1} \circ U^{-1}$.

برهان. i) تساوی‌های دسته‌ی نخست بدیهی‌اند. برای اثبات تساوی‌های دسته‌ی دوم، فرض کنید $(x,y) \in U$. چون $(x,x),(y,y) \in \Delta(X)$، پس $(x,y) \in U \circ \Delta(X)$ و $(x,y) \in \Delta(X) \circ U$. از اینرو $U \subseteq U \circ \Delta(X)$ و $U \subseteq \Delta(X) \circ U$.

بر عکس، اگر $(x,y) \in U \circ \Delta(X)$، آن‌گاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z) \in \Delta(X)$ و $(z,y) \in U$. پس $z = x$ و بنابراین $(x,y) \in U$. از اینرو $U \circ \Delta(X) \subseteq U$. همچنین، اگر $(x,y) \in \Delta(X) \circ U$، آن‌گاه یک $u \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,u) \in U$ و $(u,y) \in \Delta(X)$. پس $u = y$ و بنابراین $(x,y) \in U$. از اینرو $\Delta(X) \circ U \subseteq U$.

ii) اگر $(x,y) \in (U \circ V) \circ W$، آن‌گاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z) \in W$ و $(z,y) \in U \circ V$. به علاوه، یک $u \in X$ نیز وجود دارد به طوری که $(z,u) \in V$ و $(u,y) \in U$. بنابراین $(x,u) \in V \circ W$ و از اینرو $(x,y) \in U \circ (V \circ W)$. در نتیجه، $(U \circ V) \circ W \subseteq U \circ (V \circ W)$.

بر عکس، اگر $(x,y) \in U \circ (V \circ W)$، آن‌گاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z) \in V \circ W$ و $(z,y) \in U$. به علاوه، یک $u \in X$ نیز وجود دارد به طوری که $(x,u) \in W$ و $(u,z) \in V$. بنابراین $(u,y) \in U \circ V$ و از اینرو $(x,y) \in (U \circ V) \circ W$. در نتیجه، $U \circ (V \circ W) \subseteq (U \circ V) \circ W$.

iii) فقط شمول نخست را ثابت می‌کنیم. اثبات شمول دوم مشابه است. اگر $(x,y) \in U \circ U$، آن‌گاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z),(z,y) \in U \subseteq V$. بنابراین $(x,y) \in V \circ V$ و از اینرو $U \circ U \subseteq V \circ V$.

iv) اگر $(x,y) \in U$، آن‌گاه طبق فرض و بندهای (i) و (iii) گزاره‌ی ۱.۱ داریم $(x,x) \in \Delta(X) \subseteq U$ و $(x,x) \in \Delta(X) = \Delta(X)^{-1} \subseteq U^{-1}$. بنابراین $(x,y) \in U \circ U$ و $(x,y) \in U \circ U^{-1}$. از اینرو $U \subseteq U \circ U$ و $U \subseteq U \circ U^{-1}$.

v) اگر $(x,y) \in (U \circ V)^{-1}$، آن‌گاه $(y,x) \in U \circ V$ و یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(y,z) \in V$ و $(z,x) \in U$. بنابراین $(z,y) \in V^{-1}$ و $(x,z) \in U^{-1}$ و از اینرو $(x,y) \in V^{-1} \circ U^{-1}$. در نتیجه، $(U \circ V)^{-1} \subseteq V^{-1} \circ U^{-1}$.

بر عکس، اگر $(x,y) \in V^{-1} \circ U^{-1}$، آن‌گاه یک $z \in X$ وجود دارد به طوری که $(x,z) \in U^{-1}$ و $(z,y) \in V^{-1}$. بنابراین $(z,x) \in U$ و $(y,z) \in V$ و از اینرو $(y,x) \in U \circ V$، یعنی، $(x,y) \in (U \circ V)^{-1}$. در نتیجه، $V^{-1} \circ U^{-1} \subseteq (U \circ V)^{-1}$. □

۳.۱ تبصره. با توجه به بند (ii) گزاره‌ی ۲.۱، به کمک اصل استقرای ریاضی، می‌توان بند (iv) لم ۱.۱ و بندهای (iii)، (iv) و (v) لم ۲.۱ را به شکل زیر تعمیم داد:

- اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه برای هر $n \geq 2$ و هر $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{\pm 1\}$ داریم $U^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ U^{\varepsilon_n} \subseteq V^{\varepsilon_1} \circ \cdots \circ V^{\varepsilon_n}$ که در آن $U^1 = U$ و $V^1 = V$. به ویژه، $\underbrace{U \circ \cdots \circ U}_{n \text{ بار}} \subseteq \underbrace{V \circ \cdots \circ V}_{n \text{ بار}}$.
- اگر $\Delta(X) \subseteq U$، آن‌گاه برای هر $m \geq n \geq 2$ داریم $\underbrace{U \circ \cdots \circ U}_{n \text{ بار}} \subseteq \underbrace{U \circ \cdots \circ U}_{m \text{ بار}}$.
- برای هر $n \geq 2$ و هر $U_1, \ldots, U_n \subseteq X \times X$ داریم

$$\Big(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\Big)^{-1} = \bigcup_{i=1}^{n} U_i^{-1}, \quad \Big(\bigcap_{i=1}^{n} U_i\Big)^{-1} = \bigcap_{i=1}^{n} U_i^{-1} \quad \text{و} \quad (U_1 \circ \cdots \circ U_n)^{-1} = U_n^{-1} \circ \cdots \circ U_1^{-1}.$$

چون برهان‌های عبارت‌های بالا بسیار شبیه برهان‌های بندهای متناظر گزاره‌های ۱.۱ و ۲.۱ هستند، از ذکر جزئیات آنها در این نکته خودداری می‌شود.

نتیجه‌ی زیر یک پیامد جالب گزاره‌ی ۲.۱ است.

۴.۱ نتیجه. اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، آن‌گاه خانواده‌ی همه‌ی رابطه‌های روی X با عمل ترکیب تشکیل یک تکواره با عضو همانی $\Delta(X)$ می‌دهد.

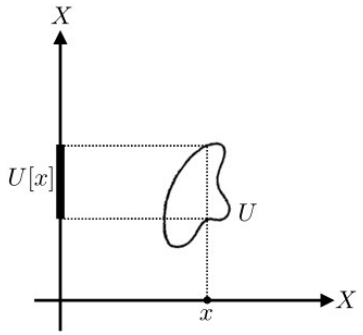
برهان. روشن است که ترکیب هر دو رابطه‌ی روی X یک رابطه روی X است، یعنی، خانواده‌ی همه‌ی رابطه‌های روی X تحت عمل ترکیب بسته است. به علاوه، بندهای (ii) و (i) گزاره‌ی ۲.۱ به ترتیب نشان می‌دهند که عمل ترکیب رابطه‌ها شرکتپذیر است و $\Delta(X)$ عضو همانی آن می‌باشد. در نتیجه، $(\mathcal{P}(X \times X), \circ)$ یک تکواره با عضو همانی $\Delta(X)$ است. □

بر خلاف انتظار، ممکن است ترکیب یک رابطه با وارون خود برابر قطر نباشد، یعنی، $(\mathcal{P}(X \times X), \circ)$ لزوماً یک گروه نیست، و همچنین، ممکن است ترکیب دو رابطه‌ی ناتهی، تهی باشد. برای مثال، اگر $X = \{۱, ۲\}$ و $U = \{(۱, ۱), (۱, ۲)\}$، آن‌گاه $(۱, ۲) \in U \circ U^{-۱}$، ولی $(۱, ۲) \notin \Delta(X)$، و اگر $V = \{(۱, ۲)\}$، آن‌گاه $V \circ V = \emptyset$.

نمادگذاری‌های مربوط به قطر یک مجموعه‌ی ناتهی و اعمال وارون و ترکیب رابطه‌ها ابزار مناسبی برای بیان چهار ویژگی مهم رابطه‌ها به زبان ریاضی هستند. در واقع، اگر X مجموعه‌ای ناتهی و U یک رابطه روی X باشد، آن‌گاه عبارت‌های زیر برقرارند:

- رابطه‌ی U ویژگی بازتابی دارد اگر و فقط اگر $\Delta(X) \subseteq U$؛
- رابطه‌ی U ویژگی تقارنی دارد اگر و فقط اگر $U = U^{-۱}$؛
- رابطه‌ی U ویژگی پادتقارنی دارد اگر و فقط اگر $U \cap U^{-۱} \subseteq \Delta(X)$؛
- رابطه‌ی U ویژگی ترایایی دارد اگر و فقط اگر $U \circ U \subseteq U$.

با توجه به عبارت‌های بالا و بند (iv) گزاره‌ی ۲.۱، U یک رابطه‌ی هم‌ارزی است اگر و فقط اگر $\Delta(X) \subseteq U = U^{-۱} = U \circ U$، و یک رابطه‌ی ترتیب جزئی است اگر و فقط اگر $U \cap U^{-۱} \subseteq \Delta(X) \subseteq U = U \circ U$. از اینرو یگانه رابطه‌ای که هم هم‌ارزی است و هم ترتیب جزئی، رابطه‌ی تساوی (یعنی، $\Delta(X)$) می‌باشد.



شکل ۲.۱: نگاره‌ی x تحت U

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. اگر $x \in X$ و U یک رابطه روی X باشد، آن‌گاه $U[x]$ برابر مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های دوم زوج‌های مرتب متعلق به U با مؤلفه‌ی اول x تعریف می‌شود، یعنی،

$$U[x] = \{y \in X : (x, y) \in U\}.$$

در واقع، $U[x]$ نگاره‌ی وارون U تحت نگاشت $y \mapsto (x, y)$ از X به توی $X \times X$ است. به ویژه، اگر $f : X \to X$ نگاشتی دلخواه باشد، آن‌گاه $(\mathrm{graph}(f))[x] = \{f(x)\}$. به همین سبب، گاهی اوقات $U[x]$ نگاره‌ی x تحت U نامیده می‌شود.

این قسمت را با گزاره‌ی زیر به پایان می‌رسانیم. این گزاره شماری از حالات خاص و مهمترین ویژگی‌های نگاره‌ی یک نقطه تحت یک رابطه را بیان می‌کند.

۵.۱ گزاره ([۶، قضیه‌ی ۲.۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. اگر $x \in X$ و U و V دو رابطه روی X باشند، آن‌گاه عبارت‌های زیر برقرارند:

i) $\emptyset[x] = \emptyset$، $\Delta(X)[x] = \{x\}$ و $(X \times X)[x] = X$.

ii) اگر $U \subseteq V$، آن‌گاه $U[x] \subseteq V[x]$.

iii) $(U \cup V)[x] = U[x] \cup V[x]$ و $(U \cap V)[x] = U[x] \cap V[x]$.

iv) $(U \circ V)[x] = \bigcup_{y \in V[x]} U[y]$.

برهان. i) تساوی نخست به روشنی برقرار است. برای اثبات تساوی‌های دوم و سوم داریم

$$\Delta(X)[x] = \{y \in X : (x, y) \in \Delta(X)\} = \{x\}$$

و

$$(X \times X)[x] = \{y \in X : (x, y) \in X \times X\} = X.$$

ii) اگر $y \in U[x]$، آن‌گاه $(x, y) \in U \subseteq V$. بنابراین $y \in V[x]$ و از اینرو $U[x] \subseteq V[x]$.

iii) فقط تساوی نخست را ثابت می‌کنیم. اثبات تساوی دیگر مشابه است. به این منظور داریم

$$\begin{aligned}(U \cup V)[x] &= \{y \in X : (x, y) \in U \cup V\} \\ &= \{y \in X : (x, y) \in U\} \cup \{y \in X : (x, y) \in V\} = U[x] \cup V[x].\end{aligned}$$

iv) اگر $z \in (U \circ V)[x]$، آن‌گاه $(x, z) \in U \circ V$ و یک $y \in X$ وجود دارد به طوری که $(x, y) \in V$ و $(y, z) \in U$. بنابراین $y \in V[x]$ و $z \in U[y]$. از اینرو $z \in \bigcup_{y \in V[x]} U[y]$. در نتیجه، $(U \circ V)[x] \subseteq \bigcup_{y \in V[x]} U[y]$. بر عکس، اگر $z \in \bigcup_{y \in V[x]} U[y]$، آن‌گاه یک $y \in V[x]$ وجود دارد به طوری که $z \in U[y]$. بنابراین $(x, y) \in V$ و $(y, z) \in U$. از اینرو $(x, z) \in U \circ V$، یعنی، $z \in (U \circ V)[x]$. در نتیجه، $\bigcup_{y \in V[x]} U[y] \subseteq (U \circ V)[x]$. □

یکنواختی و فضای یکنواخت

پیش از آغاز بحث درباره‌ی یکنواختی و فضاهای یکنواخت، برای پیشگیری از ابهام، لازم است چند نماد که در سرتاسر این رساله برای ایجاز در گفتار به کار می‌روند، معرفی کنیم.

منظور از $\mathbb{Z}^+$، مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی و منظور از $\mathbb{R}^+$، مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی است که برای سادگی، از گذاشتن اندیس صفر برای آنها خودداری شده است. بنابراین

$$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \ldots\} \quad \text{و} \quad \mathbb{R}^+ = [0, \infty).$$

اگر X مجموعه‌ای ناتهی باشد، آن‌گاه $\rho_\circ$ و $d_\circ$ به ترتیب نمایانگر شبه‌متر ثابت صفر و متر گسسته بر X هستند، یعنی،

$$\rho_\circ(x,y)=\circ \quad \text{و} \quad d_\circ(x,y)=\begin{cases} ۱ & x\neq y, \\ \circ & x=y \end{cases} \qquad (x,y\in X).$$

برای نمایش درون و بستار هر زیرمجموعه‌ی A از فضای توپولوژیک دلخواه (X,τ)، به ترتیب از A° و $\overline{A}$ استفاده می‌کنیم. بنابراین A° بزرگترین زیرمجموعه‌ی باز X مشمول در A، و $\overline{A}$ کوچکترین زیرمجموعه‌ی بسته‌ی X شامل A است. به علاوه، اگر $x\in X$، آن‌گاه منظور از یک همسایگی x، زیرمجموعه‌ای از X است که x را در درون خود دارد و $\mathcal{N}_x$ نمایانگر دستگاه همسایگی x می‌باشد، یعنی،

$$\mathcal{N}_x=\{A\subseteq X : x\in A^\circ\}.$$

از اینرو اگرچه شماری از نویسندگان همچون مانکرس [۵] همسایگی‌ها را زیرمجموعه‌های بازی از فضاهای توپولوژیک معرفی می‌کنند، اما با توجه به قرارداد انجام‌شده، لزومی ندارد یک همسایگی مجموعه‌ای باز باشد.

سرانجام، اگر (X,d) یک فضای متریک باشد، آن‌گاه برای هر $x\in X$ و هر $r>\circ$، از $N_r(x)$ برای نمایش همسایگی به مرکز x و شعاع r استفاده می‌کنیم. بنابراین

$$N_r(x)=\big\{y\in X : d(y,x)<r\big\}.$$

فصل ۲
نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت یکنواختی به کمک پیرامون‌های پایه‌ای

منظور از یک نقطه‌ی ثابت برای یک نگاشت از مجموعه‌ای ناتهی به توی خودش، نقطه‌ای از آن مجموعه است که تحت آن نگاشت ثابت می‌ماند. نظریه‌ای که وجود و یکتایی چنین نقاطی را بررسی می‌کند «نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت» نامیده می‌شود که زیرشاخه‌ای از آنالیز تابعی غیرخطی و پلی بین ریاضیات محض و کاربردی است. این نظریه بخش وسیعی از پژوهش‌های ریاضیات را در دهه‌های اخیر به خود اختصاص داده است و کاربردهای گسترده‌ای در علوم رایانه و مهندسی، نظریه‌ی معادلات دیفرانسیل و انتگرال، نظریه‌ی بازی‌ها، نظریه‌ی تقریب، اقتصاد و ... دارد. با استفاده از این نظریه، بسیاری از معادلات دیفرانسیل و انتگرال و مسائل مقدار آغازی مانند معادله‌ی انتگرال فردهولم و معادله‌ی انتگرال ولترا حل و قضیه‌ی وجود و یکتایی جواب برای معادلات دیفرانسیل معمولی ثابت می‌شود. چون نقطه‌ی ثابت به خودی خود یک مفهوم مجرد در نظریه‌ی مجموعه‌هاست، پس نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت را می‌توان با بسیاری از ساختارهای ریاضی در هم آمیخت، یعنی، بر مجموعه‌هایی ناتهی دارای یک ساختار ریاضی مشخص مطالعه کرد. برای مثال، اگر وجود و یکتایی نقاط ثابت در فضاهای متریک بررسی شوند، آن‌گاه به آن «نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت متری» یا «نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت در فضاهای متریک» گفته می‌شود. به همین ترتیب، با بررسی وجود و یکتایی نقاط ثابت در فضاهای یکنواخت، «نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت یکنواختی» یا «نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت در فضاهای یکنواخت» پدید می‌آید.

مفهوم نقطه‌ی ثابت و اصل انقباض باناخ در فضاهای متریک

فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $T : X \to X$ نگاشتی دلخواه است. در نظریه‌ی نقطه‌ی ثابت، اغلب برای سادگی در نمایش کنش T بر هر نقطه‌ی $x \in X$ از گذاشتن کمانک دور x خودداری می‌شود. ما نیز در این رساله، از این قاعده پیروی می‌کنیم و به جای $T(x)$ می‌نویسیم Tx.

به همین ترتیب، اگر $S : X \to X$ نگاشت دیگری باشد، آن‌گاه به جای $T \circ S$ و $(T \circ S)(x)$ نمادهای ساده‌تر TS و TSx را به کار می‌بریم. به علاوه، قرارداد می‌کنیم که

$$T^{۰} = \mathrm{id}_X, \quad T^{۱} = T \quad \text{و} \quad T^n = \underbrace{T \circ \cdots \circ T}_{n \text{ بار}} \qquad n = ۲, ۳, \ldots .$$

۱.۲ تعریف ([۳، تعریف ۱.۰.۰]). فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی و $T : X \to X$ نگاشتی دلخواه است. نقطه‌ی $x \in X$ یک نقطه‌ی ثابت T نامیده می‌شود هرگاه $Tx = x$. مجموعه‌ی همه‌ی نقاط ثابت T با $\mathrm{Fix}(T)$ نشان داده می‌شود.

نمونه‌ای از یک جدول

جدول ۱.۲: تعداد حاضرین و غایبین در جلسه

روز	حاضرین	غایبین
شنبه	۱۵	۳
یکشنبه	۲۰	۷
دوشنبه	۱۲	۲

نتیجه‌گیری و چند پیشنهاد برای پژوهش‌های آتی

مراجع

[1] S. M. A. Aleomraninejad, Sh. Rezapour and N. Shahzad, Convergence of an iterative scheme for multifunctions, *J. Fixed Point Theory Appl.* **12** (2012), no. 1-2, 239–246.

[2] M. R. Alfuraidan and M. A. Khamsi, Caristi fixed point theorem in metric spaces with a graph, *Abstr. Appl. Anal.* **2014**, Art. ID 303484, 5 pages.

[3] A. Granas and J. Dugundji, Fixed Point Theory, *Springer-Verlag, New York*, 2003.

[4] W. A. Kirk, Fixed points of asymptotic contractions, *J. Math. Anal. Appl.* **277** (2003), no. 2, 645–650.

[5] J. R. Munkres, Topology: A First Course, *Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.*, 1975.

[6] W. Roelcke and S. Dierolf, Uniform Structures on Topological Groups and Their Quotients, *McGraw-Hill International Book Co., New York*, 1981.

[۷] انجمن ریاضی ایران با همکاری گروه ریاضی و آمار مرکز نشر دانشگاهی، واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار (انگلیسی-فارسی، فارسی-انگلیسی)، تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۸.

[۸] مجیدی، فریبرز، فرهنگ تلفّظ نام‌های خاص (تاریخی و جغرافیایی)، تهران: فرهنگ معاصر، ۱۳۹۰.

فهرست نمادها

A°	درون A در یک فضای توپولوژیک	۸
$\overline{A}$	بستار A در یک فضای توپولوژیک	۸
$\mathrm{card}(X)$	عدد اصلی X	۲
$\Delta(X)$	قطر X در حاصل‌ضرب دکارتی $X \times X$	۳
$d_\circ$	متر گسسته	۸
$\mathrm{Fix}(T)$	مجموعه‌ی نقاط ثابت T	۹
$\mathrm{graph}(f)$	نمودار f	۳
id_X	نگاشت همانی X	۲
$\mathcal{N}_x$	دستگاه همسایگی x در یک فضای توپولوژیک	۸
$N_r(x)$	همسایگی به مرکز x و شعاع r در یک فضای متریک	۸
$\mathcal{P}(X)$	مجموعه‌ی توانی X	۲
$\mathbb{R}^+$	مجموعه‌ی اعداد حقیقی نامنفی	۷
$\rho_\circ$	شبه‌متر ثابت صفر	۸
T^n	ترکیب نگاشت T با خودش n بار (n-امین تکرار نگاشت T)	۹
U^{-1}	وارون رابطه‌ی U	۳
$U \circ V$	ترکیب رابطه‌ی U با رابطه‌ی V	۳
$U[x]$	نگاره‌ی x تحت U، یک همسایگی یکنواخت x	۶
$Y \subseteq X$	Y یک زیرمجموعه‌ی X است.	۲
$Y \subset X$	Y یک زیرمجموعه‌ی سره X است.	۲
$\mathbb{Z}^+$	مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی	۷

واژه‌نامه‌ی فارسی به انگلیسی

آ
ا

اصل انقباض باناخ	Banach contraction principle
اعضای U-نزدیک	U-close elements
انقباض	contraction
– خطی	linear –
– غیرخطی	nonlinear –
– مجانبی	asymptotic –
– مرتب	ordered –
E-فاصله	E-distance

ب
پ
ت
ث
ج
چ
ح
خ
د

دنباله	sequence
–ی تکرار پیکارد	Picard iteration –
–های هم‌ارز	equivalent –s
– کوشی	Cauchy –
– یکنواخت	uniformly –

ذ
ر
ز
ژ
س
ش
ص
ض
ط
ظ
ع
غ
ف
ق
ک
گ
ل
م
ن
و
ه
ی

واژه‌نامه‌ی انگلیسی به فارسی

A

absorbing set	مجموعه‌ی جاذب

B

Banach contraction principle	اصل انقباض باناخ
Banach G-contraction	G-انقباض باناخ
Banach G-p-contraction	G-p-انقباض باناخ
Banach G-ρ-contraction	G-ρ-انقباض باناخ

C

cone	مخروط
– metric	متر –ی
– metric space	فضای متریک –ی
– topology	توپولوژی –ی
– uniformity	یکنواختی –ی

D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
N
O
P

Q
R
S
T
U
V
W
X
Y
Z

نمایه

آ

ا

ب

پ

ت

ترکیب رابطه‌ها، ۳

ث

ج

چ

ح

خ

د

ذ

ر

ز

ژ

س

ش

ص

ض

ط

ظ

ع

غ

ف

ق

قطر (مجموعه‌ی ناتهی)، ۲

ک

گ

ل

م

ن

نقطه

—ی ثابت، ۹

و

وارون رابطه، ۳

ه

همسایگی، ۸

ی

Abstract

In this thesis,

Keywords: Keyword 1; keyword 2; keyword 3.

2010 Mathematics Subject Classification: Primary: 47H10; Secondary: 54H25, 54E15, 05C20.

K. N. Toosi University of Technology
Faculty of Mathematics

Ph.D. Thesis

Field

Title:

Title of Ph.D. Thesis

Author:

Aris Aghanians

Supervisor:

Dr. ...

Advisor:

Dr. ...

September 2016